

# TD 38 : Espérance, variance Indications

## Espérance (sans variance)

**1** ★ Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . On définit  $S = X + Y$  et  $D = X - Y$ .

- 1) Montrer que  $\mathbb{E}(SD) = \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(D)$ .
- 2) Est-ce que  $S$  et  $D$  sont indépendantes ?

**2** ★★ On tire au hasard un entier  $X$  entre 1 et  $n$ , puis on tire à nouveau un entier  $Y$  entre 1 et  $X$ .

- 1) Déterminer la loi de  $Y$  sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
- 2) Calculer (explicitement) l'espérance de  $Y$ .

Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant un événement  $\{X = i\}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

**3** ★★ On considère une urne avec une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, etc. jusqu'à  $n$  boules numérotées  $n$ . On tire au hasard une boule de cette urne et on note  $X$  le numéro obtenu.

- 1) Déterminer la loi de  $X$ .
- 2) Déterminer l'espérance de  $X$ , puis de  $\frac{1}{X}$ , et de  $\frac{2^X}{X}$ .

**4** ★★ (techniquement hors-programme MPSI) On propose de jouer au jeu suivant : le joueur  $A$  donne  $x$  euros au joueur  $B$ , puis le joueur  $A$  tire à pile ou face jusqu'à obtenir pile.

- Si  $A$  obtient zéro face, le joueur  $B$  lui donne un euro.
- Si  $A$  obtient une faces, le joueur  $B$  lui donne deux euros.
- Si  $A$  obtient deux faces, le joueur  $B$  lui donne quatre euros.
- etc.

Pour quelle valeur de  $x$  est-ce que le jeu est équitable ?

## Espérance, variance, covariance

**5** ★ On considère  $U$  et  $V$  deux v.a. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $X = U + V$  et  $Y = U - V$ .

- 1) Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$ .
- 2) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**6** ★★★ Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

- 1) Rappeler la loi que suivent les v.a.  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$ .
- 2) Simplifier  $\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ .
- 3) Montrer que pour tous événements  $A', B'$  disjoints, on a  $\text{Cov}(\mathbb{1}_{A'}, \mathbb{1}_{B'}) \leq 0$
- 4) En déduire que  $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$ .

4 On pourra réécrire  $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_X + \mathbb{1}_Y$  avec  $X$  et  $Y$  des ensembles bien choisis.

**7** ★★ On considère un péage autoroutier avec 3 barrières. Un total de  $n$  voitures franchissent ce péage en passant (indépendamment les unes des autres) par une des 3 barrières. On note  $X_1, X_2$  et  $X_3$  les v.a. qui correspondent au nombre de voitures ayant franchi chacune des 3 barrières, respectivement.

- 1) Déterminer la loi de  $X_1$ .
- 2) Calculer les variances de  $X_1$ , de  $X_2$  et de  $X_1 + X_2$ .
- 3) En déduire la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ .

**8** ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  un  $(n+1)$ -uplet de v.a. indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$ . On pose pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la v.a.  $Y_i = X_i X_{i+1}$ .

- 1) Déterminer la loi de  $Y_i$ .
- 2) On suppose  $n \geq 3$ . Les v.a.  $Y_1$  et  $Y_2$  sont-elles indépendantes ? Les v.a.  $Y_1$  et  $Y_3$  sont-elles indépendantes ?

3) Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Déterminer  $\mathbb{E}(S_n)$  et  $\mathbb{V}(S_n)$ .

## Inégalités probabilistes

**9** ★★ (CCINP) Soit  $\varepsilon > 0$  et  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Soit  $F = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ .

1) Démontrer que

$$\mathbb{P}(|F - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

2) On effectue des tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

**10** ★★ Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a \leq b$  et  $X$  une v.a. à valeurs dans  $[a, b]$ .

1) Montrer que  $\frac{1}{X} \leq \frac{a+b-X}{ab}$ .

2) En déduire que  $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}$ .

1) Il suffit de montrer que pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $\frac{1}{x} \leq \frac{a+b-x}{ab}$ . Simplifier et chercher les factorisations...

2) Il n'y a pas de gros théorème à utiliser, là encore on se ramène à une situation similaire à des inégalités entre réels à démontrer.